مقرر الاحتمالات و الإحصاء

المحاضرة الثالثة

الاحتمال الشرطي و استقلال الأحداث العشوائية

Conditional Probability and Independence

1. الاحتمال الشرطي (Conditional Probability)
2. قاعدة الاحتمالات المركبة (Multiplicative Rules)
3. الاستقلال العشوائي (Random Independence)
4. الاحتمال الكلي و قانون بايز (Total Probability and Bayes Rule)

مثال تمهيدي:

في تجربة إلقاء قطعة نرد منتظمة فضاء العينة هو $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ليكن $A=\{1,2,3\}$ هو حدث ظهور رقم أقل من أربعة من الواضح أنَّ:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ليكن $B=\{2,4,6\}$ حدث ظهور رقم زوجي، إنَّ $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

إذا علمنا أن الحدث B قد وقع فما هو احتمال وقوع الحدث A؟ بكلام آخر ما هو احتمال الحصول على رقم زوجي أقل من أربعة؟

الاحتمال المشروط:

ليكن Ω فضاء العينة الموافق لتجربة ما E و ليكن A و B حدثين من هذا الفضاء. نُعرف احتمال وقوع الحدث A بشرط وقوع الحدث B و نرمز له بـــ $P(A|B)$ بالعلاقة التالية:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\quad P(B)>0$$

و التي تُدعى قانون الاحتمال الشرطي.

ملاحظة:

إن التطبيق $P:F\to\mathbb{R};\ A\to P(A|B)$ هو تابع احتمالي لأنه يحقق بديهيات الاحتمال:

1 إن $0\le P(A\cap B)\le P(B)$ و بالتالي $0\le P(A|B)\le 1$.

2 $P(\Omega|B)=\dfrac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(B)}{P(B)}=1$.

3 إذا كانت $(A_i)_{i\in I}$ متتالية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى فإن:

$$P\left[\left(\underset{i\in I}{\cup}A_i\right)|B\right]=\frac{P\left[\left(\underset{i\in I}{\cup}A_i\right)\cap B\right]}{P[B]}$$

$$=\frac{P\left[\underset{i\in I}{\cup}(A_i\cap B)\right]}{P[B]}=\sum_{i\in I}P(A_i|B)$$

مثال:

بفرض أن احتمال إقلاع طائرة في الوقت المحدد لها هو $P(B)=0.83$ و احتمال أن تصل في الوقت المحدد هو $P(A)=0.82$ و احتمال أن تقلع و أن تصل في الوقت المحدد هو $P(A\cap B)=0.78$. احسب :

1 احتمال وصول الطائرة في موعدها علماً أنها أقلعت في موعدها.

2 احتمال إقلاع الطائرة في موعدها علماً أنها وصلت في الموعد المحدد.

الاحتمالات المركبة (Multiplicative Rules):

مبرهنة:

ليكن لدينا الحدثين A و B عندئذ:

$$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$

وهو ما ندعوه قانون الاحتمالات المركبة.

ملاحظة:

بما أنّ $A\cap B=B\cap A$ فإنّ $P(A\cap B)=P(B\cap A)=P(B)P(A|B)$. بكلام آخر ليس هناك أهمية لترتيب الحدثين A و B في قانون الاحتمالات المركبة.

مثال:

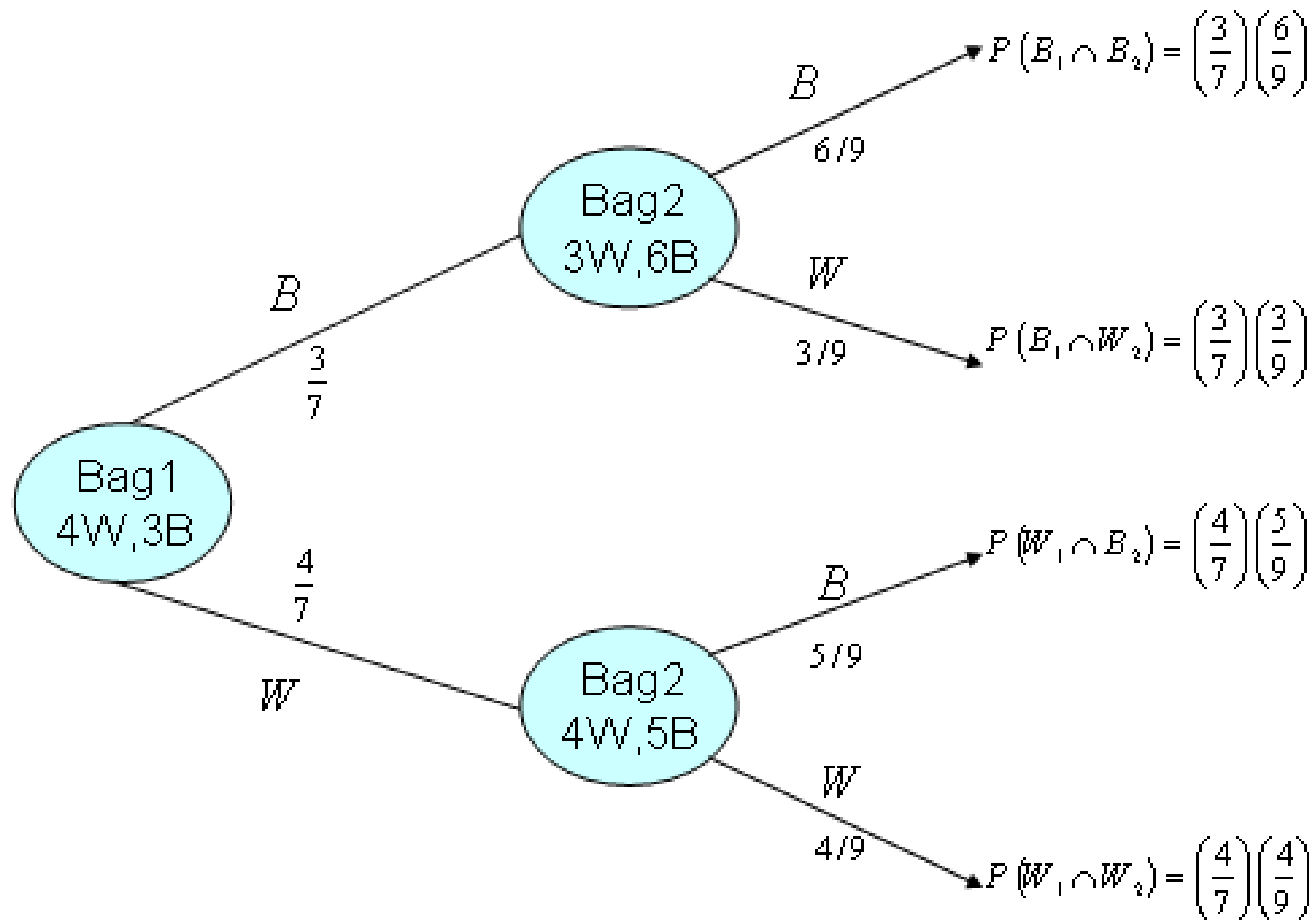
حقيبتان الأولى تحوي 4 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء.

الثانية تحوي 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء.

سُحبت كرة من الحقيبة الأولى و وُضعت دون رؤيتها في الكيس الثاني

ثم سُحبت كرة من الحقيبة الثانية.

ما هو احتمال أن تكون هذه الكرة سوداء؟



Bag1
4W,3B
B
3/7
Bag2
3W,6B
B
6/9
$P(B_1 \cap B_2) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{6}{9}\right)$
W
3/9
$P(B_1 \cap W_2) = \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{3}{9}\right)$
4/7
W
Bag2
4W,5B
B
5/9
$P(W_1 \cap B_2) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{5}{9}\right)$
W
4/9
$P(W_1 \cap W_2) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{4}{9}\right)$

مبرهنة:

لتكن لدينا الأحداث $A_1, A_2, \dots, A_n$ و المتعلقة بتجربة ما E ، عندئذ:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap \cdots A_{n-1})$$

الاستقلال العشوائي(Random Independence):

تعريف:

نقول أن الحدثين A و B مستقلان إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$P(A|B)=P(A) \text{ or } P(B|A)=P(B)$$

و إلا قلنا أن الحدثين مرتبطين.

ملاحظة:

أن يكون الحدثين A و B مستقلين فهذا يعني أن وقوع أحدهما لا يؤثر في احتمال وقوع الحدث الأخر.

أن يكون الحدثين A و B متنافيين فهذا يعني أن وقوع أحدهما يؤدي إلى عدم وقوع الحدث الأخر.

يجب عدم الخلط بين الأحداث المتنافية و الأحداث المستقلة!!!

نتائج:

- ليكن لدينا الحدثين A و B عندئذ A و B مستقلين إذا و فقط إذا تحقق الشرط التالي

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

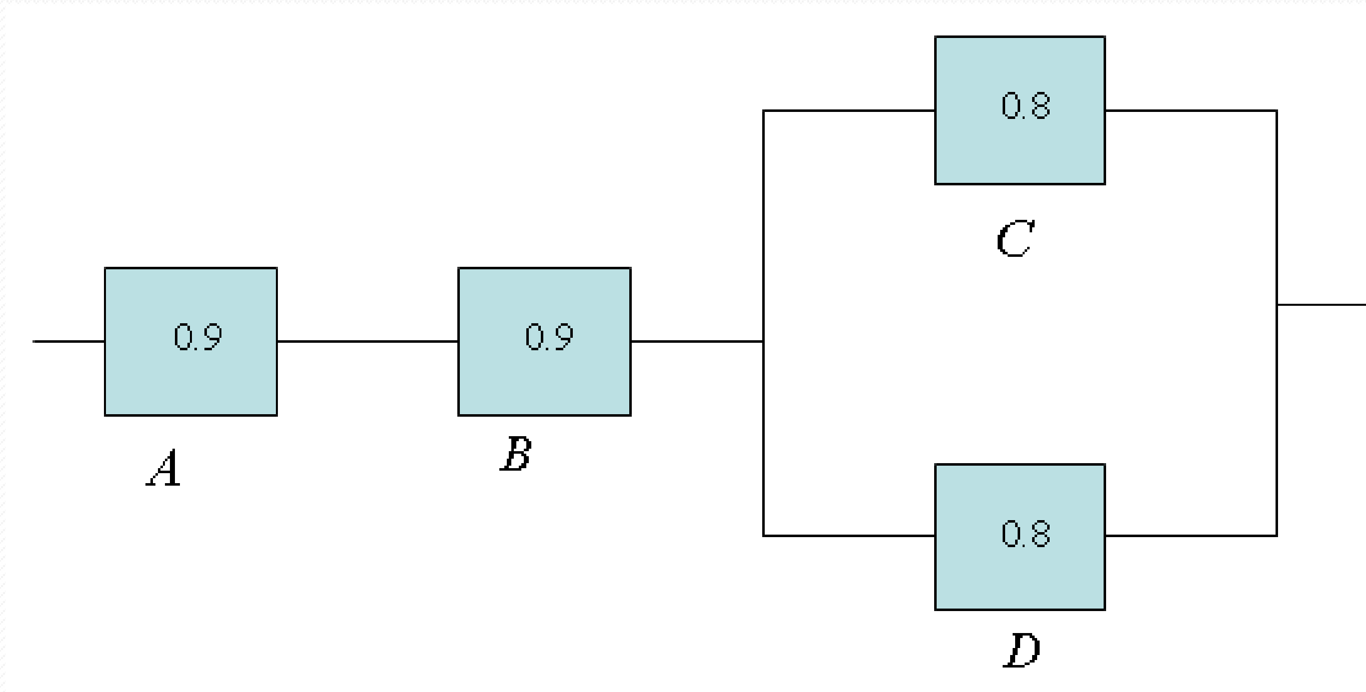
- إذا كان A و B حدثين مستقلين، عندئذ:

1. الحدثان A' و B' مستقلان.
2. الحدثان A' و B مستقلان و كذلك الحدثين A و B'.

مثال:

لدينا نظام كهربائي مكون من أربع وحدات كما في الشكل أدناه. النظام يعمل إذا كانت الوحدات A و B تعملان و إحدى الوحدتين C أو D تعمل. لنفرض أنَّ الوحدات تعمل بشكل مستقل و أنَّ احتمال عمل كل وحدة معطى في الرسم التوضيحي أدناه. ما هو:

1. احتمال أن يكون النظام في حالة عمل؟
2. احتمال أن لا تعمل الوحدة C علماً أن النظام يعمل؟


0.9
A
0.9
B
0.8
C
0.8
D

استقلال عدة أحداث عشوائية (Independence of events):

تعريف:

نقول أن الأحداث $A_1, A_2, \ldots, A_n$ مستقلة، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1. كل متتالية جزئية مُكونة من $n-1$ حدثا عشوائياً مستقلة .
2. $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n)$.

ملاحظة:

الأحداث المستقلة مثنى مثنى ليست بالضرورة مستقلة.

مثال:

ليكن لدينا فضاء العينة التالي

$$\Omega = \{abc, acb, cab, cba, bca, bac, aaa, bbb, ccc\}$$

جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال، احتمال كلٍ منها هو $\frac{1}{9}$. A_k حدث كون الحرف a في الموقع رقم k حيث $k = 1, 2, 3$.

الأحداث A_1, A_2, A_3 مستقلة مثنى مثنى و لكن غير مستقلة!!

نتيجة:

إذا كانت الأحداث A,B,C مستقلة فإنّ الأحداث A',B',C' مستقلة أيضاً.

و كذلك الأحداث A',B,C مستقلة و الأحداث A',B',C مستقلة وهكذا...الخ.

مثال:

ثلاثة رماة A,B,C احتمال إصابتهم للهدف هو $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{5}$ على الترتيب.

إذا صوب كل منهم طلقة واحدة نحو الهدف ذاته فما هو احتمال:

1. إصابة الهدف.
2. إصابة الهدف بطلقة واحدة.
3. عدم إصابة الهدف.

الاحتمال الكلي و قانون بايز

Total Probability and Bayes' Rule

تعريف:

لتكن لدينا الأحداث $B_1,B_2,\ldots,B_n$ من فضاء العينة Ω.

نقول عن هذه الأحداث أنّها تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω

إذا و فقط إذا تحققت الشروط التالية:

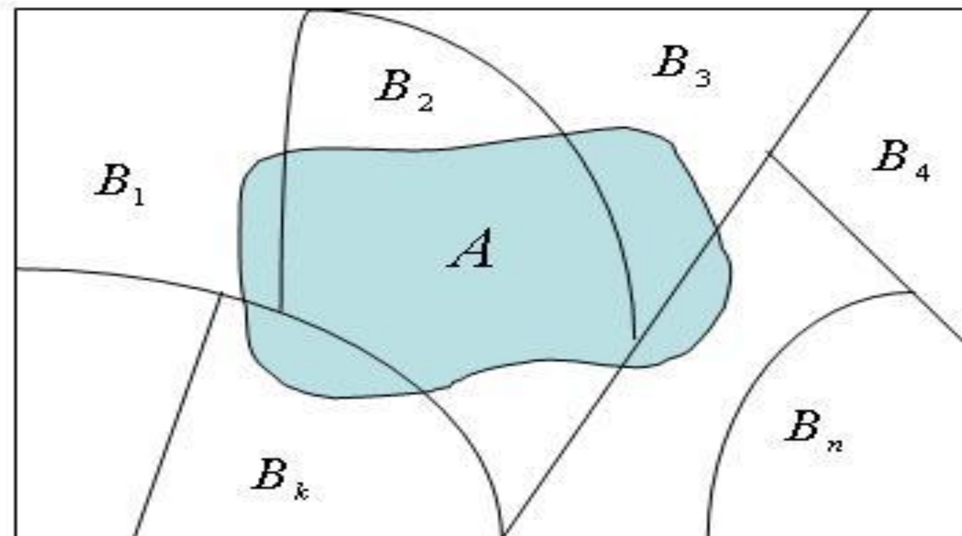
1. $\forall i = 1,2,\ldots,n ; P(B_i) > 0$
2. $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$
3. $\forall i,j = 1,2,\ldots,n \,,\, i \neq j \;;\; B_i \cap B_j = \phi$.

نتائج:

1. إذا كانت $B_1, B_2, \dots, B_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = P(\Omega) = 1$$

2. أية تجزئة للفضاء Ω تؤدي إلى تجزئة لأي حدث من هذا الفضاء.



تجزئة فضاء العينة Ω

مبرهنة الاحتمال الكلي (Theorem of Total Probability)

لتكن لدينا الأحداث $B_1, B_2, \dots, B_n$ و التي تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω و حيث $P(B_i) \neq 0$ من أجل كل $\forall i = 1, 2, \dots, n$. عندئذ من أجل أي حدث $A \subseteq \Omega$ فإن:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A | B_i)$$

مثال:

ثلاث آلات B_1, B_2, B_3 تنتج 25%, 45%, 30% من المنتج النهائي على الترتيب.

نعلم أن 2%, 3%, 2% من منتجات الآلات الثلاثة على الترتيب غير صالحة.

ما احتمال الحصول على منتج غير صالح في حال تم اختيار أحد منتجات هذا المصنع عشوائياً.

قانون بايز (Baye's Rule)

لتكن لدينا الأحداث $B_1, B_2, \ldots, B_n$ و التي تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω

و حيث $P(B_i) \neq 0$ من أجل كل $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

عندئذ من أجل أي حدث $A \subseteq \Omega$ حيث $P(A) \neq 0$ فإن:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i) P(A | B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A | B_i)}$$

و هو ما يُسمى قانون بايز.

ملاحظة:

إنّ قانون بايز يُسمى أيضاً احتمال السبب لأنّ الحدث A لا يقع إلا إذا وقع أحد الأحداث المسببة في حدوثه $B_1,B_2,\ldots,B_n$.
إذاً عند وقوع الحدث A يمكن البحث عن المسببات في وقوعه و احتمال كل منها.

مثال:

في المثال السابق ما هو احتمال أن يكون المنتج المسحوب من إنتاج الآلة الثالثة علماً أنه غير صالح.